CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"
Etapa locală, 19.02.2017
Filiera tehnologică: profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII-a

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases}\ln x\,, x\geq 1\\ \frac{x-x^3}{1+x^4},\ x<1\end{cases}$

a) Calculaţi $\int_{-1}^{e} f(x)dx$.

b) Determinaţi primitiva funcţiei f pentru care $F(0)+F(1)=2016$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

Soluție:

a)

$$\int_{-1}^{e} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x-x^3}{1+x^4}dx+\int_{1}^{e}\ln x\,dx=1\text{(2p)}$$

b)

Studierea continuității funcției f (1p).

$$F(x)=\begin{cases}x\ln x-x+c_1, x\geq 1\\ \frac{1}{2}arctg\,x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+c_2, x<1\end{cases}\text{(2p)}$$

$$F(x)=\begin{cases}x\ln x-x+1009+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\ln 2\,, x\geq 1\\ \frac{1}{2}arctg\,x^2-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+1008-\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}\ln 2\,, x<1\end{cases}\text{(2p)}$$

c) F este primitiva funcției f pe intervalul $[1,+\infty)$ dacă F este derivabilă pe $[1,+\infty)$ și $F'(x)=f(x)$, $x\in[1,+\infty)$.

$F'(x)=\ln x\geq 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow$ F este crescătoare pe $[1,+\infty)$.(2p)

1. Să se calculeze:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx$

b) $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx$

Soluție:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx = \int \frac{(x^2+3x+3)'}{x^2+3x+3}dx$(3p) $= \ln(x^2+3x+3)+C$(1p)

b) Funcția $f:(-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ este impară(2p)

$\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx = 0$(1p)

2. Să se arate că pe mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} / a,b \in Q, a^2+b^2 \neq 0 \right\}$, înmulțirea matricelor determină o structură de grup.

Să se arate că acest grup este izomorf cu grupul $\left(Q(\sqrt{3}),\cdot\right)$ unde $Q\left(\sqrt{3}\right) = \{\, a+b\sqrt{3} / a,b \in Q, a^2+b^2 \neq 0 \,\}$.

Soluție:

a) Operatie internă...1p

Axiomele grupului ……………………………………………………..…….3p

Izomorfismul este dat de aplicatia

$f: Q\left(\sqrt{3}\right) \to M,\ f\left(a+b\sqrt{3}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}, \forall a,b \in Q, a^2+b^2 \neq 0.$ 1p

Justificarea faptului că functia f este morfism 1p

Justificarea faptului că functia f este bijectivă ……………………………………1p

3. Pe R se consideră legea de compoziție $x \circ y = 3xy+3x+3y+2, \forall x,y \in R$.

a) Să se calculeze $y \circ (-1)$;

b) Să se arate că $(-2012)\circ(-2011)\circ ... \circ 0 \circ 1 \circ ... \circ 2012 + \frac{4}{3} > 0$

c) Să se găsească două numere $a,b \in R-Q$ cu proprietatea că $a \circ b \in N$.

Soluție:

a) Calcul..1p

$y \circ (-1) = 3y(-1)+3y+3(-1)+2$

Finalizare...1p

$y\circ(-1)=-1$

b) Din comutativitatea legii de compoziție " $\circ$ "

$$\Rightarrow y\circ(-1)=(-1)\circ y=-1, \forall y\in R$$ 1p

Calcul $(-2012)\circ(-2011)\circ...\circ 0\circ 1\circ...\circ 2012 = x\circ(-1)\circ y=(-1)\circ y=-1$ 1p

Finalizare.....................................1p

$(-2012)\circ(-2011)\circ...\circ 0\circ 1\circ...\circ 2012+\frac{4}{3}=-1+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}>0$

c) Exemplu: $a=\frac{1}{\sqrt{5}}; b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ sau orice alte valori corespunzătoare..............2p